

1. Vektoren

Addition

• $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
 • $\vec{c} + (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{b}$

Einheitsvektor e

- Länge 1: $|\vec{e}| = 1$
- $\vec{e}_v = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$

Skalarprodukt/Volumen

- $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ **Determinante**
1. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$: Rechtssystem **3x3**
 2. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$: ^{min.} einer der Vektoren = 0
• $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen auf Fläche
 3. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] < 0$: Linkssystem

Komponentenzerlegung

$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$

$\lambda_1 = \frac{[\vec{v}, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}{[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}$

$\lambda_2 = \frac{[\vec{a}_1, \vec{v}, \vec{a}_3]}{[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}$

$\lambda_3 = \frac{[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v}]}{[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}$

Skalarmultiplikation

- $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{b}$
 - z.B.: $3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
- ## Betrag
- $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$
 - z.B.: $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$
 - Länge des Vektors

Skalarprodukt

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda$ $A^T \cdot B = \lambda$
- z.B.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 12$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$
- $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow$ Vektoren orthogonal
- **Kommutativ**: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- **Distributiv**: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$

Kreuzprodukt

- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ $= |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta$ $\leftarrow$ Fläche
- $\vec{a} \times \vec{b} = (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \theta) \vec{n}$
- **Antikommutativ**: $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$
- **Distributiv**: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$
- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$

Lineare Unabhängigkeit

- $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$
- $\rightarrow$ Menge an Vektoren genau dann linear unabhängig, wenn nur die Bedingung/das Ergebnis "Null" erreicht wird, wenn alle λ "Null" sind.
- im $\mathbb{R}^2$: wenn $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq 0$
 $\rightarrow$ linear **abhängig**
- im $\mathbb{R}^3$: wenn $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = 0$
 $\rightarrow$ linear **abhängig**

Projektion

$\vec{b}$ auf $\vec{a}$ projizieren:

$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$

Vektorräume

- Menge: $\{V, \oplus, \odot\}$
- $\oplus: V \times V \rightarrow V$
 - $\odot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$
 - 1. Assoziativ: $(x+y)+z = (x+y)+z$
 - 2. Kommutativ: $x+y = y+x$
 - 3. Neutrales Element: $x+0 = x$
 - 4. Inverses: $x+y = 0$
 - 5. Assoziativ: $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$
 - 6. Identität: $1 \cdot x = x$
 - 7. Distributiv: $\lambda \cdot (x+y) = \lambda x + \lambda y$

Untervektorraum

1. $0 \in U$
2. $x, y \in U \rightarrow x+y \in U$
3. $x \in U, \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda \cdot x \in U$

Matrizen

Determinanten

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$

- $\det(\hat{A}) = 0$, wenn
- Zeile oder Spalte nur Nullen
 - zwei Zeilen/Spalten gleich
 - Zeile ist Vielfache einer Anderen

Sarrus:

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot g \cdot d - d \cdot e \cdot i - f \cdot g \cdot a - g \cdot h \cdot b$

3. Komplexe Zahlen

Kartesische Form:

$z = a + b \cdot i$

Real-Teil Imaginär-Teil

Polarform:

$r \cdot e^{i \cdot \theta}$

$r = |\vec{a}|$ $\theta = \tan^{-1}(\frac{\text{Im}}{\text{Re}})$

Addition:

$z_1 = 4 + 3i; z_2 = 2 + 2i$

$z_1 + z_2 = 4 + 3i + 2 + 2i = 6 + 5i$

$i^2 = -1$

$i = \sqrt{-1}$

Multiplikation

$z_1 \cdot z_2 = (4+3i) \cdot (2+2i)$

$= 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2i + 3i \cdot 2 + 3i \cdot 2i$

$= 8 + 8i + 6i + 6i^2$

$= 8 + 14i + 6(-1)$

$= 2 + 14i$

Division

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+3i}{2+2i} = \frac{(4+3i) \cdot (2-2i)}{(2+2i) \cdot (2-2i)}$

$= \frac{(4+3i) \cdot (2-2i)}{4+4-2i-2i}$

$= \frac{4+4-2i-2i}{8-4i}$

$= \frac{8-4i}{8-4i} = 1$

$(A - \lambda E) \vec{v} = 0 \rightarrow$ LGS

z.B.: $\begin{pmatrix} 7-2 & -2 & 0 \\ -2 & 6-2 & -2 \\ 0 & -2 & 5-2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ nicht eindeutig bestimmt; für $v_1 = 1$:

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ nicht eindeutig bestimmt; für $v_1 = 1$:

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dyadisches Produkt:

$\hat{A} \cdot \hat{B}^T =$

Komplex konjugierte Zahl $z = x + y \cdot i$

$\bar{z} = x - y \cdot i$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$

Eigenwerte und Eigenvektoren

- Diagonalmatrix:
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$ Diagonale sind die Eigenwerte
 $\rightarrow \lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 5$
- $|\hat{A} - \lambda \hat{E}| = 0$

z.B.: $\begin{vmatrix} 7-2 & -2 & 0 \\ -2 & 6-2 & -2 \\ 0 & -2 & 5-2 \end{vmatrix} = 0$

$\rightarrow -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 95\lambda + 162 = 0$

Mitternachtsformel:

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

p/q-Formel:

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$\rightarrow \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 6 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 9$

Inverse Matrix

$\hat{A}^{-1} \cdot \hat{A} = \hat{E}$

invertierbar, wenn: $\det(\hat{A}) \neq 0$ **quadratisch**

Inverse von 2x2 Matrix:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Invertieren von 3x3 Matrix:

z.B.: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$

$\rightarrow$ mit Gauß so umformen, dass links Einheitsmatrix $\hat{E}$ entsteht (**Spalte für Spalte**)
 $\rightarrow$ die rechte Matrix ist die Invertierte.

Inverse umstellen

$\hat{A} \hat{x} = \hat{b}$

$\Leftrightarrow \hat{x} = \hat{A}^{-1} \hat{b}$

$\hat{x} \hat{A} = \hat{b}$

$\Leftrightarrow \hat{x} = \hat{A} \hat{b}^{-1}$

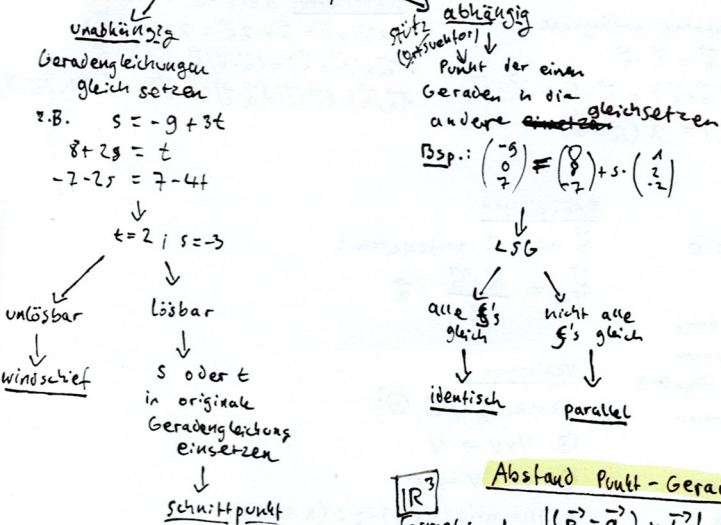
Lagebeziehungen

Gerade - Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1. Lineare Abhängigkeit der Richtungsvektoren bestimmen

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$



Ebene - Ebene

- Ebene in Koordinatenform
- Ebene in Parameterform

1. Ebene in Parameterform in die in Koordinatenform einsetzen

→ z.B. $\mu = 2 + 1 \rightarrow$ Schnittgerade

→ z.B. $s = 1 \rightarrow$ echt parallel

→ z.B. $2 = 2 \rightarrow$ identisch

2+1 in die Ebene in Parameterform einsetzen

Winkel zwei Vektoren

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

Gram Schmidt

→ alle werden orthogonal zueinander
 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 \quad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|^2} \cdot \vec{b}_1$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|^2} \cdot \vec{b}_1 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_2|^2} \cdot \vec{b}_2$$

Würfel: $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$

Quader: $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$

Pyramide: $\frac{V}{3}$

Prisma: $\frac{V}{2}$

Tetraeder: $\frac{V}{6}$

$$c = -b + a$$

$$c^2 = (a-b)^2$$

$$c^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$c^2 = 0$$

Winkel Gerade - Gerade

$\vec{a}$: Richtungsvektor Gerade g
 $\vec{b}$: Richtungsvektor Gerade h

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

Winkel Ebene - Ebene

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \right)$$

Winkel Gerade - Ebene

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} \right)$$

$\vec{a}$: Richtungsvektor Gerade
 $\vec{n}$: Normalvektor Ebene

Binomische Formeln

$$1. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Quadranten bei komplexen Zahlen

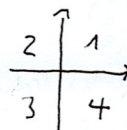
$$\frac{1}{4} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad x > 0, y \text{ beliebig}$$

$$2 \quad +180^\circ \quad x < 0, y \geq 0$$

$$3 \quad +180^\circ \quad x < 0, y < 0$$

$$\frac{\pi}{2} \quad x^2 > 0, y > 0$$

$$-\frac{\pi}{2} \quad x = 0, y < 0$$



Gerade - Ebene

- Ebene in Koordinatenform
- Gerade in Parameterform

$$E: x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 10 = 0$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

→ $\vec{n}$ -Vektor und Richtungsvektor setzen und $\vec{n} \cdot \vec{s} = 0$ prüfen
falls $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$ identisch oder parallel

$$\text{z.B. } \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -7 \rightarrow \text{keins der beiden}$$

g in E einsetzen

$$1 \cdot (0 + 2 \cdot 0) + 3 \cdot (1 - 2) - 2 \cdot (0 + 2 \cdot 2) - 10 = 0$$

↓ vereinfachen

$$2 = -1$$

↓ 2 in die Geradengleichung einsetzen
Schnittpunkt

→ falls 1=1 → Gerade liegt in Ebene

→ falls 5=3 → echt parallel

Abstand Punkt - Ebene

Ebene in Koordinatenform

→ in Hessesche Normalform

$$E: \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{|\vec{n}|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

→ Koordinaten des Punkts P einsetzen in die Form

$$\Rightarrow \left| \frac{a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c \cdot p_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \rightarrow \text{Abstand}$$

Koordinatenform in Parameterform

1. Spurpunkte bestimmen

$$\text{Bsp. } x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$$

→ jeweils zwei Koordinaten = 0 setzen

$$0 + 0 + x_3 - 4 = 0$$

$$x_3 = 4$$

$$P_1 (0 | 0 | 4)$$

$$P_2 (0 | 4 | 0)$$

$$P_3 (4 | 0 | 0)$$

2. Spannvektoren

$$\vec{v} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \vec{P}_3 - \vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

3. Parameterform

→ einen der drei Punkte als Stützvektor

Bsp. P_1 als Stützvektor:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Parameterform in Koordinatenform

1. Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren für $\vec{n}$ Vektor

$$\text{Bsp. } E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -15 \\ -9 \end{pmatrix} \quad E: 35x_1 + 4x_2 - 15x_3 = a$$

2. Stützvektor einsetzen

$$35 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 15 \cdot 4 = a$$

$$a = -13$$

3. Fertige Form

$$35x_1 + 4x_2 - 15x_3 = -13$$