

Immer Pläne & Lösungsweg & Begründungen notieren!

INTEGRALE

Fläche (unter Graph)

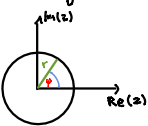
$$A = \int_a^b f(x) dx$$

$$I = [a; b]$$

Mehrfachintegrale

1. Variablen unabhängig → Vertauschen + Integrale auseinander ziehen
2. Variablen abhängig → Vertauschen nicht erlaubt + von innen nach außen integrieren

Imaginäre Zahlen



Wenn $z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)]$

$$x \rightarrow r \cdot \cos(\varphi)$$

$$y \rightarrow r \cdot \sin(\varphi)$$

$$\sqrt{-1} = i$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot i$$

Funktionen

implizit: z.B. $y + x - 1 = 0$
explizit: z.B. $y = -x + 1$

Doppelintegral

$$I = \iint f(x,y) dy dx$$

$$dA = dy \cdot dx$$

Dreifachintegral

$$I = \iiint f(x,y,z) dV \quad V = |I|$$

$$dV = dz \cdot dy \cdot dx$$

Dreifachintegral Zylinderkoordinaten

$$\iiint dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} r dz d\varphi dr$$

$$\rightarrow \iiint dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} r dz d\varphi dr$$

Integraltricks

- Bei Kreisfläche am besten $\frac{1}{4} A$ berechnen
- Wenn eine Variable integriert wird, die nicht existiert, dann ist die Integration einfach die Variable $\int dx = x$
- $\varphi = [0; \frac{\pi}{2}]$
- $r = [0; r]$

Partielle Integration

$$u \cdot v = \int u' \cdot v + \int u \cdot v'$$

$$1) \int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

$$2) \int u' \cdot v = \int u \cdot v' - \int u \cdot v'$$

Randlinie

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

PARTIELLE DIFFERENTIALE

Partielles Differential

Es werden alle Teile ohne Variable als konstanter gesehen

Bsp. $f(x,y) = 4x^2 + 0,5y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,5$$

nur wenn stetig:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Hesse-Matrix

So wie Jacobi, aber Differentiale 2. Ordnung

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

verallgemeinerte Kettenregel

$$h(x,y) = f(g(x,y))$$

$$x: \frac{dh}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$y: \frac{dh}{dy} = \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

Werte einsetzen

Schreibweise: $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(2;3)}$

Zylinderkoordinaten

$r = r(t)$ und $\varphi = \varphi(t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Tangentialebene

Punkt $P(x_0 | y_0 | f(x_0, y_0))$

$$E: h(x,y) = z = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \cdot (y - y_0) + z_0$$

Tangentensteigung (implizit, an Stelle (x_0, y_0))

$$f'(x,y) = - \frac{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}}$$

implizit: $4x^2 + y^2 - 100 = 0 = f(x,y,z)$
explizit: $y = 3x^2 + 2x + 1$

Totales Differential (Vollständiges Differential)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

muss stehen bleiben

Extrema

notwendige Bed.: $\text{grad } f(\vec{x}) = 0, \vec{x} = (x,y)$

hinr. Bedingung an der Stelle (x_0, y_0) gilt: $\det(H) = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_0, y_0)} \cdot \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} - \left[\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \right]^2 > 0$

Maximum: $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_E, y_E)} < 0$

Minimum: $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_E, y_E)} > 0$

$E(x_E, y_E)$

Grad

Bsp.: $\text{grad } f(\vec{x}) = 0$

=> Funktion f nach jeder Variation einmal partiell differenzieren und gleich Null setzen

Standardabweichung

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

(i = 1, 2, ..., n)

besatzänderung: $\Delta f = \Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{y})} \cdot \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(\bar{x}, \bar{y})} \cdot \Delta y$

„größtmöglicher Messfehler“

$$x = (\bar{x} \pm \Delta x)$$

$$y = (\bar{y} \pm \Delta y)$$

Beispiel Extremstellen

$f(x,y) = x^4 + x^2 + 2y^2 - 4y$

$\text{grad}(f) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2x \rightarrow 4x^3 + 2x = 0$$

$$x(4x^2 + 2) = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4$$

$$4y - 4 = 0 \rightarrow y = 1$$

Extremum liegt vor! (H(0|1))

$\det(H)$ berechnen: $2 \cdot 4 - 0 = 8 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 2$ $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(0,1)} = 2 \rightarrow \text{Minimum}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$ $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{(0,1)} = 4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$ $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right|_{(0,1)} = 0$

OPTIMIERUNG

Lagrange-Multiplikator λ

ges: P auf E min. Abstand d zum Ursprung
Bsp: ges: E: $2x + 3y + z = 14$

1. Zielfunktion aufstellen (Min/Max) (woll ich optimieren)
2. implizite Hilfsfunktion φ (Nebenbedingung) (Wert gegeben)
3. Funktion mit λ & φ aufstellen
 $F(x,y,z,\lambda) = 2F + \lambda \cdot NB$
4. grad (F) = 0 aufstellen
5. Gleichungssystem lösen

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{aus Kontext})$$

$$\varphi(x,y,z) = 2x + 3y + z - 14 = 0$$

$$F(x,y,z,\lambda) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \lambda \cdot (2x + 3y + z - 14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$$

↳ LGS

Allgemeine Methode

1. Zielfunktion mit gegebenen Variablen aufstellen
2. Nebenbedingungen aufstellen und ggf. umformen
3. NB in ZF einsetzen $\rightarrow$ ZF nur noch von 1 bzw. 2 Variablen abhängig
4. ZF optimieren mit notw. Bed. grad $A(a,u) = 0$
5. ZF ableiten und mit hinr. Bed. $f''(x) < 0 \rightarrow$ HP prüfen

Bsp.: Rechtecksfläche optimieren

$$A = A(a,b) = a \cdot b$$

$$u = 2a + 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}(u - 2a)$$

$$A(a,u) = a \cdot \frac{1}{2}(u - 2a) = \frac{1}{2}a \cdot u - a^2$$

$$\frac{\partial A}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial A}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} \Rightarrow \frac{1}{2}u - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}u \Rightarrow \text{unbrauchbar}$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} \Rightarrow \frac{1}{2}u - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}u \dots \text{ in } b = \frac{1}{2}(u - \frac{1}{2}u) \Rightarrow b = \frac{1}{4}u \Rightarrow a = b$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial a^2} = -2 < 0 \rightarrow \text{HP} \checkmark$$

Geometrie und so

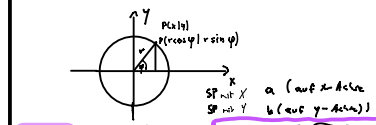
Kreis (Ursprung)

Im kartesischen Koordinatensystem kann jeder Punkt mit Abstand r zum Ursprung mit der Gleichung dargestellt werden:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{bzw.} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Explizite Kreisgleichung: $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ (nach einer Variable)

Implizite Kreisfunktion: $F(x,y,r) = 0 = x^2 + y^2 - r^2$ (auflösen nach 0)

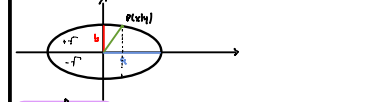


Ellipse (Ursprung)

Einheitsform: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

exakt: $y = \pm \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}$

implizit: $F(x,y,0) = 0 = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$



Kreisfläche ges: i.B. r = 5cm

Ansatz: $A = 4 \cdot \frac{1}{4} \iint dA$

$$\frac{1}{4} \iint dA = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^r r \, dr \, d\phi$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^r d\phi = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} r^2 d\phi$$

am Ende mal 4 nicht vergessen!

Zylinderfläche

$$\frac{1}{4} V = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^h r \, dz \, dr \, d\phi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^r r \, dr \, d\phi \cdot h$$

Rotationskörper

Bsp: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ges: $h(4,2)$

um z: $r^2 = x^2 + y^2$

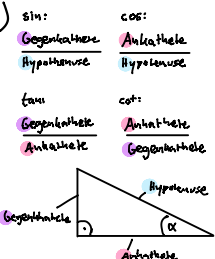
um y: $r^2 = x^2 + z^2$

um x: $r^2 = y^2 + z^2$

Mantel M:

$$M = 2\pi \int_0^4 f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

Winkel



DGL (Gleichung, in der eine Funktion und ihre Ableitung miteinander verbunden)

Schreibweise: $y' = \frac{dy}{dx} = y'(x)$

Form: $y' + f(x)y = g(x)$ (1. Ordnung)

Was gibt es für DGLs?

- linear ($y, y', \dots$ ohne Exponent)
- homogen (wenn $g(x) = 0$)
- 1. Ordnung / 2. Ordnung / ...
- 1. Ordnung: $y' + f(x)y = g(x)$
- 2. Ordnung: $y'' + f(x)y' + h(x)y = g(x)$
- exakt: $\rightarrow$ Lösung immer konstant
- Muss in Form $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ darstellbar sein
- und es gilt: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ (falls $\neq \rightarrow$ nicht exakt)
- mit konstantem Koeffizienten: wenn $f(x)$ konstant $\rightarrow y' + ay = g(x)$
- " $f(x) = h(x)$ " $\rightarrow y'' + ay' + by = g(x)$

Basisfunktion/Fundamentalfunktion

- Typ: $y'' + ay' + by = 0$
- zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ und Lösung auch $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$
 - ↳ ① y_1 und y_2 sind allein Basisfunktionen
 - ↳ ② y_1 und y_2 sind zusammen Fundamentalfunktion

Wronski-Determinante (prüfen ob Basisfunktionen/Fundamentalfunktion passt)

Typ: $y'' + ay' + by = 0$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$= y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1' \neq 0$$

↳ wenn erfüllt, linear unabhängig

↳ Basisfunktionen

LÖSUNGSANSATZE

homogen, linear, 1. Ordnung:

Trennen der Variablen ODE

Ansatz: $y(x) = C e^{-\int f(x) dx}$

+ konstanter Koeffizient: wenn $f(x)$ konstant $\rightarrow y' + ay = g(x)$

Ansatz: $y(x) = C e^{-ax}$

inhomogen, linear, 1. Ordnung:

Lösung: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

1. Lösen des homogenen Teils y_h (links) durch $y(x) = C e^{-\int f(x) dx}$ oder Trennen der V. $g(x)$ wird 0 gesetzt
2. Partikuläre Lösung y_p wird zu $g(x)$ gegeben (Tabelle)

+ konstanter Koeffizient

$y = C e^{-ax}$ für homogenen Teil der Gleichung (links)

homogen, linear, 2. Ordnung:

Konstanter Koeffizient

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$$(\lambda^2 + a\lambda + b = 0)$$

Für λ können 3 Fälle auftreten:

Fall (I): λ hat 2 reelle Lösungen ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

Fall (II): λ hat 1 reelle Lösung ($\lambda_1 = \lambda_2$)

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x} = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

Fall (III): λ hat 2 komplexe Lösungen

$$\lambda_{1/2} = p \pm i\omega$$

$$y(x) = [c_1 [\cos(\omega x) + \sin(\omega x)] + c_2 [\cos(-\omega x) + \sin(-\omega x)]] e^{px}$$

Wenn y_1 Lösung ist, dann auch $y_2 = C \cdot y_1$

Wenn y_1 und y_2 Lösungen, dann auch $y_1 + y_2$

spezielle Lösung:

- Anfangsbedingung (z.B. $x(0) = 4$) in allgemeine Lösung einsetzen
- Nach c auflösen.
- c dann wieder in allgemeine Lösung einsetzen

Partikuläre Lösung (bei inhomogen)

1. Die Lösung aus Tabelle y_p ggf. abgeleitet in originale DGL einsetzen ($g(x)$ nicht vergessen)
2. Nach den Variablen der Lösung aus Tabelle auflösen
3. Die Variablen in den Lösungsansatz aus Tabelle einsetzen
4. Lösung ist dann $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

unvollständig/nicht exakt integrierender Faktor $\lambda(x)$

$f'' = \lambda(x)f \quad g'' = \lambda(x)g$

Ansatz: $f'' dx + g'' dy = 0$

$$\frac{df''}{dy} = \frac{dg''}{dx}$$

Beispiel: $(x^2 + y) dx + 1 dy = 0$

$$f'' = \lambda(x)(x^2 + y) \quad g'' = \lambda(x) \cdot 1$$

$$\rightarrow \lambda(x) \cdot (x^2 + y) dx + \lambda(x) \cdot 1 dy = 0$$

$$\frac{df''}{dy} = \frac{dg''}{dx} \Rightarrow \lambda(x) = \lambda'(x) \quad \text{Funktion}$$

$\lambda(x) = \lambda'(x)$ erfüllt Gleichung

einsetzen: $\lambda(x) \cdot (x^2 + y) dx + \lambda(x) dy = 0$

wie vollständig/exakt ab jetzt betrachten

$$y(x) = C e^{-x^2 - x^2 - 2x}$$

exakt/vollständig Bsp: $\lambda(x^2 + y) dx + \lambda(x) dy = 0 \quad | : \lambda$

Ansatz: Nur nach einer Variable integrieren

una. Integrationskonstante K als Funktion mit einer (d.h. der anderen) Variable definieren

1. $e^x(x^2 + y) dx + e^x dy = 0 \rightarrow$ nach dy: $\int e^x dy = y e^x + K(x) = f(x,y)$
2. $U_1' = \frac{dy}{dx} = y e^x \frac{dy}{dx} + \frac{dK(x)}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y e^x + K'(x) = c_1$
3. $e^x(x^2 + y) dx \rightarrow K(x) = x^2 e^x$
4. $\int K(x) dx = K(x) + c_2 = (x^2 - 2x + 2) e^x + c_2$
5. $K(x)$ einsetzen: $y e^x + (x^2 - 2x + 2) e^x + c_2 = c_1$

Schwerpunkte

$S(x_s|y_c)$

1. homogene, ebene Fläche im $\mathbb{R}^2$

$$x_s = \frac{1}{A} \iint x dA = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} x dy dx \quad y_s = \frac{1}{A} \iint y dA = \frac{1}{A} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} y dy dx$$

bzw. in Polar Koordinaten

$$x_s = \frac{1}{A} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} r \cos(\varphi) r dr d\varphi = \frac{1}{A} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \cos(\varphi) dr d\varphi$$
$$y_s = \frac{1}{A} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} r \sin(\varphi) r dr d\varphi = \frac{1}{A} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \sin(\varphi) dr d\varphi$$

2. homogener Körper im $\mathbb{R}^3$

$$x_s = \frac{1}{V} \iiint x dV = \frac{1}{V} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} x dz dy dx$$
$$y_s = \frac{1}{V} \iiint y dV = \frac{1}{V} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} y dz dy dx$$
$$z_s = \frac{1}{V} \iiint z dV = \frac{1}{V} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} z dz dy dx$$

$y = f(x)$ und $z = h(x; y)$

$I_x = [x_1; x_2]; I_y = [y_1; y_2]; I_z = [z_1; z_2]$

BEISPIELE

partiell differenzieren

$$f(r, \varphi) = 4re^{0,25\varphi}$$
$$\frac{\partial f}{\partial r} = 4e^{0,25\varphi}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = re^{0,25\varphi}$$

Ellipse

Bestimmen Sie die Punkte der Ellipse

$$1 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}y^2 \quad \text{an denen die Steigung der Randlinie} = 2$$
$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}y^2 - 1 \quad 1.8$$
$$f'(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}x = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{4}y = 0 \Rightarrow x=0, y=0$$
$$f''(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{4}$$
$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{8} > 0 \Rightarrow \text{Min}$$
$$f(0, 0) = -1$$

Definitionsbereich

von $g(x, y) = \frac{1-x^2}{x-y}$

$$1. x+y \geq 0 \quad 1-y$$
$$x \geq -y$$
$$2. x-y \neq 0 \quad 1+y$$
$$x \neq y$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y, x \neq y\}$$

Ebene oben oder unten

$$b) 4x + 10y + 6z - 42 = 0 \quad | :6$$
$$\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}y + z - 7 = 0 \quad | -z$$
$$P(4|2|0)$$
$$f(x, y) = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}y + 7$$
$$z = 1$$

Allgemeine Kettenregel

$$h(x, y) = x \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(t)$$
$$f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4} = \frac{x}{16y}$$
$$\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial t} = -\sin(t)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\ln(4)} \cdot \cos(t) = \frac{4x^3 \cdot 2x}{x(4x^2+2)} = 0 \Rightarrow x=0$$
$$4y^2 + 2 = 0 \quad | -2$$
$$4y^2 = -2 \quad | :4$$
$$y^2 = -\frac{1}{2} \quad | \sqrt{}$$
$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

Gleichung der Tangentialebene der Funktion $f(x, t) = \frac{4x}{t^2} + \cos(4\pi x - \frac{\pi}{2})$ am Berührungspunkt

$$f(x, t) = \frac{1}{t^2} \cdot 4x + \cos(4\pi x - \frac{\pi}{2}) \quad A(1|4|2)$$
$$f(1; 4) = \frac{1}{16} \cdot 4 \cdot 1 + \cos(4\pi \cdot 1 - \frac{\pi}{2}) = 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{t^2} \cdot 4 + 4\pi \sin(4\pi x - \frac{\pi}{2})$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{t^3} \cdot 4x - 4\pi \sin(4\pi x - \frac{\pi}{2})$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0; t_0} = \frac{1}{16} \cdot 4 + 4\pi \sin(4\pi - \frac{\pi}{2}) = 2 - 4\pi \sin(4\pi - \frac{\pi}{2}) = 2 - 4\pi \cdot (-1) = 2 + 4\pi$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x_0; t_0} = -\frac{1}{64} \cdot 4 - 4\pi \sin(4\pi - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{16} - 4\pi \cdot (-1) = -\frac{1}{16} + 4\pi$$

Vollständige Differential bilden

$$f(x, y) = 3 \cos(x-4y) + \ln(x^2+y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3 \sin(x-4y) + \frac{1}{x^2+y} \cdot 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12 \sin(x-4y) + \frac{1}{x^2+y} \cdot 1$$
$$df = -3 \sin(x-4y) + \frac{2x}{x^2+y} dx + 12 \sin(x-4y) + \frac{1}{x^2+y} dy$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2+y} \cdot 2 = \frac{2}{x^2+y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2+y} \cdot (-1) = -\frac{1}{x^2+y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x^2+y} \cdot (-2x) = -\frac{2x}{x^2+y}$$

2. Ordnung DGL homogen

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} - 8e^{\lambda x} = 0 \quad | :e^{\lambda x}$$
$$\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3$$
$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4$$

Ansatz für 2 reelle Lösungen:

$$c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x}$$

Exaktheit überprüfen

Trick: alle Variablen auf eine Seite vor Auflösen von y'

$$y' + y = 1 - 2xy' \quad | + 2xy'$$
$$y' + y + 2xy' = 1$$
$$y'(1 + 2x) + y = 1$$
$$y'(2x+1) = -1 - y \quad | : (1-y)$$
$$y'(2x+1) + 1 - y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} (2x+1) + 1 - y = 0 \quad | \cdot dx$$
$$(2x+1)dy + (1-y)dx = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

Was kommt nicht dran?

- Kugelkoordinaten
- keine unstetigen Funktionen
- Laplace
- Euler Zerg

Abhängiges Dreifachintegral

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_y^{y^2} y z \sin(x) \, dz dy dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 y \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_y^{y^2} \sin(x) \, dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 y \cdot \left(\frac{1}{2} y^4 - \frac{1}{2} y^2 \right) \sin(x) \, dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^5 - \frac{1}{2} y^3 \right) \sin(x) \, dy dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{12} y^6 - \frac{1}{8} y^4 \right]_0^1 \sin(x) \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{12} y^6 - \frac{1}{8} y^4 \right]_0^1 [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left(\frac{1}{12} \cdot 1 - \frac{1}{8} \cdot 1 \right) [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= -\frac{1}{24} \cdot 1 = -\frac{1}{24}
 \end{aligned}$$